ΠΡΟΤΑΣΗ (Ιδιότητες της σ.π) συνάρτηση πιθανότητας

Έστω X διακριτή τ.μ με σ.π p_X Τότε:

a) $p_X(x) \ge 0$

β) $\sum_x p_X(x) = 1$

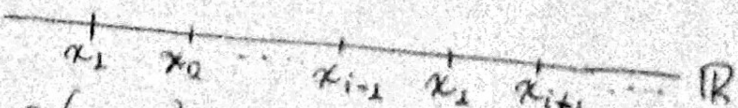
Συνθήκες που πρέπει να πληρεί μια συνάρτηση για να είναι σ.π.

Σχέση μεταξύ α.σ.κ και σ.π μιας διακριτής τ.μ.

1) Αν γνωρίζω την p_X μπορώ να βρω F_X?

Έστω X μια διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών $S_X=\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ και γνωστή σ.π p_X Ποια είναι η F_X?

$F_X(x) \overset{op}{=} P(X \le x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Αν $x < x_1$ τότε $F_X(x) \overset{op}{=} P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

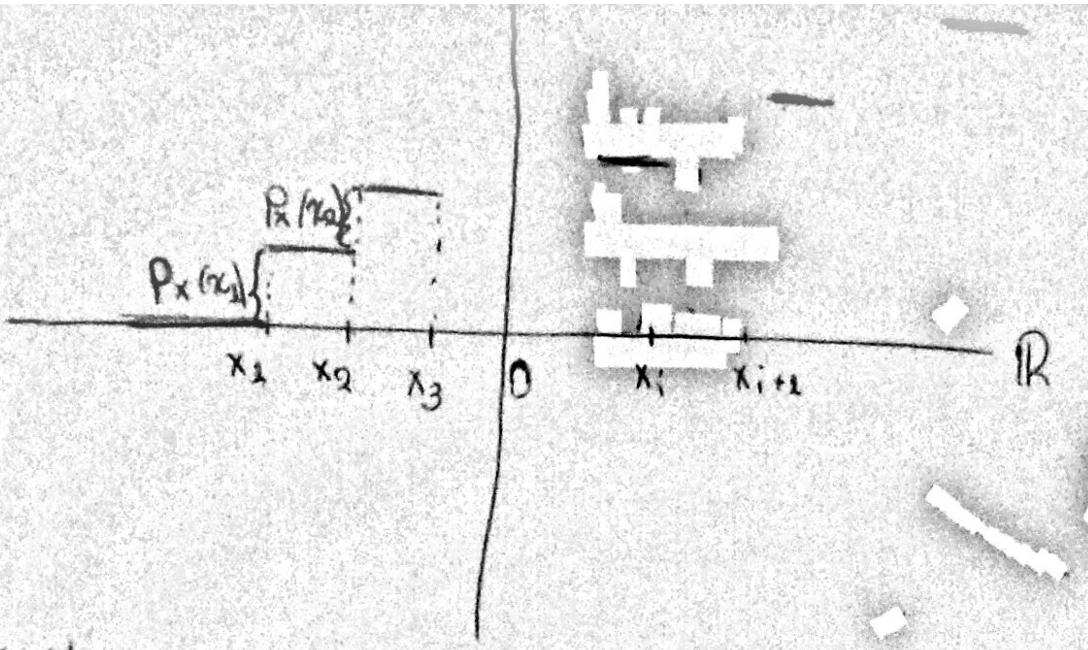
Αν $x_1 \le x < x_2$ τότε $F_X(x) \overset{op}{=} P(X \le x) = P(X = x_1) \overset{op}{=} p_X(x_1)$

Αν $x_2 \le x < x_3$ τότε $F_X(x) \overset{op}{=} P(X \le x) = P(X = x_1 \text{ ή } X = x_2) =$

$= P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_X(x_1) + p_X(x_2)$

Αν $x_i \le x < x_{i+1}$ τότε $F_X(x) \overset{op}{=} P(X \le x) = P(X = x_1 \text{ ή } \dots \text{ ή } X = x_i)$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} p_X(x_i) \quad i = 1, \dots n, \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$



Συμπέρασμα

Η α.σ.κ F_X μιας διακριτής τ.μ είναι κλιμακωτή συνάρτηση (σταθερή σε διαστήματα) Παρουσιάζει άλματα στα σημεία που είναι τιμές της διακριτής τ.μ. X και τα άλματα είναι ίσα με τις πιθανότητες των τιμών αυτών.

2) Αν γνωρίζω την F_X μπορώ να βρω την p_X?

Έστω X διακριτή τ.μ με σύνολο τιμών $S_X = \{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$

Ζητείται η p_X που ορίζεται σε κάθε τιμή x_i

$p_X(x_i) = P(X = x_i) \quad i = 1, 2,$

$p_X(x_i) = P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i -)$

$$\boxed{p_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) \qquad i = 1, 2, \dots}$$

Συνεχείς τ.μ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π)

Έστω τ.μ. υπεραριθμήσιμο πλήθος τιμών, με τιμές σ'ένα διάστημα ή $\mathbb{R}$
π.χ βάρος νεογέννητου, χρόνος ζωής συσκευής ή ασθενούς, η χρονική στιγμή που λεωφορείο φτάνει σε στάση κ.τ.λ.

Είναι τα εργαλεία μιας διακριτής τ.μ. ικανά ώστε να περιγράψουν μια τ.μ που παίρνει τιμές σ'ένα διάστημα?

Έχει νόημα να αναζητώ ~~να~~ μια τ.μ. X που παίρνει τιμές σε ένα διάστημα, να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή του διαστήματος?

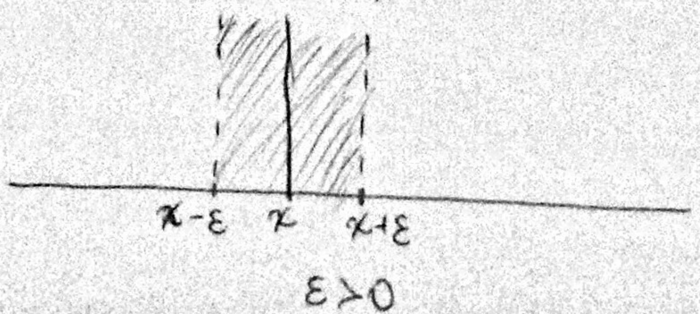
π.χ. Έστω X βάρος νεογέννητου. Το σύνολο τιμών X είναι θεωρητικά $[0, \infty)$ ή για να είμαστε ρεαλιστές $X \in (1\,kg, 10\,kg)$

Έχει νόημα η πιθανότητα $P(X = 5\,kg) = ?$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχει νόημα να ενδιαφερθώ για πιθανότητα η τ.μ. να πάρει τιμές σε ένα διάστημα οσοδήποτε μικρό γύρω από μια συγκεκριμένη τιμή

π.χ $P(5\,kg - \varepsilon \le X \le 5\,kg + \varepsilon)$

Άρα πρέπει να μπορώ να υπολογίζω πιθανότητες διαστημάτων
Πως όμως?



ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω τ.μ. X. Η X λέγεται συνεχής αν υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση f_X ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε

$$P(X\in B) = \int_B f_X(x)\,dx, \quad B\subseteq \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f_X ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

Συνέπειες του ορισμού

1) Έστω $B=[a,b]$ τότε $P(a\le X\le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

2) Έστω $B=(-\infty, x]$ $x\in\mathbb{R}$ $\quad P(X\in B) = P(-\infty < X\le x) = P(X\le x) \overset{op}{=} F_X(x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \quad x\in\mathbb{R}$$

Από Θεμελιώδες Θεώρημα Απειρ. Λογισμού (Ντούγιας § 2.6)

το $\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ συνεχής συνάρτηση του x $\forall x\in\mathbb{R}$

Άρα F_X συνεχής $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = f_X(x)$$

3) Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$